# Глава 1

# Елементи комбінаторики

## 1.1 Основний принцип комбінаторики

Комбінаторика вивчає скінченні множини. Множини позначатимемо великими латинськими літерами $A, B$, $C, \ldots$, їхні елементи — малими. Число елементів скінченної множини $A$ позначатимемо $n(A)$.

Обчислюючи число елементів множини $A$, зручно користуватися таким фактом: якщо між множинами $A$ і $B$ встановлена взаємно однозначна відповідність, то

$$n(A) = n(B)$$

(часто число елементів множини $B$ обчислити простіше, ніж число елементів множини $A$).

**Прямий добуток множин.** Нехай $A$ і $B$ — довільні множини. Кожні два елементи $a \in A$ і $b \in B$ визначають упорядковану пару $(a, b)$. Множину всіх упорядкованих пар $(a, b), a \in A, b \in B$ називатимемо *прямим* (*декартовим*) *добутком* множин $A$ і $B$ і позначатимемо $A \times B$.

**Приклад 1.1.1 .** *Знайти прямі добутки $A \times B$ і $B \times A$, де $A = \{1, 2\}$ і $B = \{3, 4, 5\}$.*

Розв'язання. $A \times B = \{(1; 3), (1; 4), (1; 5), (2; 3), (2; 4), (2; 5)\}$, $B \times A = \{(3; 1), (3; 2), (4; 1), (4; 2), (5; 1), (5; 2)\}$.

Нехай задано $k$ множин $A_1, A_2, \dots, A_k$. Множину впорядкованих наборів $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, у яких $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \dots, a_k \in A_k$, називатимемо прямим (декартовим) добутком множин $A_1, A_2, \dots, A_k$ і позначатимемо

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k.$$

**Приклад 1.1.2 .** *Якщо* $A_1 = \mathbb{R}^1, A_2 = \mathbb{R}^1, A_3 = \mathbb{R}^1$, *то прямий добуток* $A_1 \times A_2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^2$ *є площиною, а* $A_1 \times A_2 \times A_3 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^3$ *— тривимірним простором.*

**Правило множення (основний принцип комбінаторики).** *Число* $n(A \times B)$ *елементів декартового добутку* $A \times B$ *скінченних множин* $A$ *і* $B$ *дорівнює добутку* $n(A)n(B)$ *числа* $n(A)$ *елементів множини* $A$ *і числа* $n(B)$ *елементів множини* $B$:

$$n(A \times B) = n(A)n(B).$$

Справді, для кожного елемента $a \in A$ існує $n(B)$ елементів $(a, b), b \in B$, декартового добутку $A \times B$. І оскільки множина $A$ містить $n(A)$ елементів, то число $n(A \times B)$ елементів декартового добутку $A \times B$ дорівнює $n(B) + n(B) + \ldots + n(B) = n(B)n(A)$ (у лівій частині $n(A)$ доданків — за числом елементів у множині $A$).

Правило множення для декартового добутку $k$ множин: *число* $n(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k)$ *елементів декартового добутку* $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ *скінченних множин* $A_1, A_2, \dots, A_k$ *дорівнює добутку* $n(A_1)n(A_2)\dots n(A_k)$ *числа елементів* $n(A_1), n(A_2), \dots, n(A_k)$ *цих множин:*

$$n(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) = n(A_1)n(A_2)\dots n(A_k).$$

**Приклад 1.1.3.** *Нехай* $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$. *Знайти* $n(A \times B)$.

Розв'язання. $n(A \times B) = n(A)n(B) = 3 \cdot 4 = 12$.

**Правило множення в термінах дій.** Часто правило множення формулюють у термінах дій.

*Нехай необхідно виконати одну за одною* $k$ *дій. Якщо першу дію можна виконати* $n_1$ *числом способів, другу —*

*$n_2$ числом способів і так до $k$-ї дії, яку можна виконати $n_k$ числом способів, то всі $k$ дій разом можуть бути виконані $n_1 n_2 \dots n_k$ числом способів.*

Справді, позначимо через $A_1$ множину способів виконання першої дії, $A_2$ — другої, ..., $A_k$ — $k$-ої дії. Тоді елемент $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ декартового добутку $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ задає спосіб виконання всіх $k$ дій разом. Тому число всіх способів виконати $k$ дій дорівнює числу елементів декартового добутку $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$. Отже,

$$n(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) = n(A_1)n(A_2)\dots n(A_k) = n_1 n_2 \dots n_k.$$

**Приклад 1.1.4.** *Скільки чотиризначних чисел можна записати цифрами* $0, 1, 2, 3, 4, 5$, *якщо жодна цифра не повторюється більше одного разу?*

Розв'язання. Записуючи чотиризначне число, ми виконуємо чотири дії: записуємо (зліва направо) першу, другу, третю, четверту цифри. Першу дію можна виконати п'ятьма способами (нуль на першому місці не пишуть), другу — п'ятьма способами (одну цифру вже використано при записуванні першої зліва цифри, але, починаючи з другого місця, можна використовувати нуль), третю дію — чотирма способами, четверту — трьома. Тому згідно з правилом множення всі чотири дії разом можна виконати $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ способами. Отже, цифрами від 0 до 5 можна записати 300 різних чотиризначних чисел, у запису яких цифри не повторюватимуться.

**Упорядковані множини.** Множину, що складається з $n$ елементів, називатимемо *$n$-елементною*.

**Означення.** $n$-Елементну множину $\Omega$ називатимемо *впорядкованою*, якщо кожному її елементу поставлено у відповідність число (номер елемента) від 1 до $n$, причому так, що різним елементам поставлені у відповідність різні номери (інакше кажучи, встановлена взаємно однозначна відповідність між множиною $\Omega$ і підмножиною $1, 2, \dots, n$ множини натуральних чисел).

Упорядковані множини є різними, якщо вони відрізняються або своїми елементами, або їхнім порядком.

Кожну скінченну множину можна впорядкувати так: записати всі її елементи в список $a, b, c, \dots, f$, а потім кожному елементу приписати номер місця, на якому він стоїть у списку; інакше кажучи, розмістити елементи множини на занумерованих місцях і приписати кожному елементу номер місця, на якому він опинився. Зазвичай так і робитимемо.

**Перестановки.** Упорядковані множини, які відрізняються тільки порядком елементів, але не самими елементами, називатимемо *перестановками.*

**Означення.** *Перестановкою* $n$-елементної множини називатимемо її $n$-елементну впорядковану підмножину.

**Приклад 1.1.5.** *Виписати всі перестановки множини* $\Omega = \{a, b, c\}$.

Р о з в' я з а н н я. $(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)$.

**Число перестановок.** *Число* $P_n$ *усіх перестановок* $n$*-елементної множини (число способів упорядкування* $n$*-елементної множини) дорівнює* $n!$*, тобто*

$$P_n = n!$$

**Приклад 1.1.6 .** *Скількома способами можна впорядкувати множину чисел* $1, 2, \ldots, 2n$ *так, щоб парні числа одержали парні номери?*

Р о з в' я з а н н я. Щоб упорядкувати множину $1, 2, \ldots$ $\ldots, 2n$, розмістимо $2n$ чисел на $2n$ місцях, причому так, щоб парні числа опинилися на місцях з парними номерами (а отже, непарні — на місцях з непарними номерами). Виконаємо це за дві дії.

Дію першу — розмістити $n$ парних чисел на $n$ парних місцях (упорядкувати $n$-елементну множину) — можна виконати $n!$ способами, дію другу — розмістити $n$ непарних чисел на $n$ непарних місцях — $n!$ способами.

Дві дії разом (розмістити парні числа на парних місцях, непарні на непарних) згідно з правилом множення можна виконати $(n!)^2$ способами.

**Розміщення.** *Розміщенням* з $n$ елементів по $k$ називатимемо впорядковану $k$-елементну підмножину $n$-елементної множини.

Розміщення з $n$ елементів по $k$ є різними, якщо вони відрізняються або своїми елементами, або їхнім порядком.

**Приклад 1.1.7.** *Нехай $\Omega = \{a, b, c\}$. Виписати всі розміщення з 3 елементів по 2.*

Розв'язання. $(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)$.

**Число розміщень.** *Число $A_n^k$ усіх упорядкованих $k$-елементних підмножин $n$-елементної множини (число розміщень з $n$ елементів по $k$) дорівнює*

$$n(n-1)\dots(n-(k-1)),$$

*тобто*

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-(k-1)).$$

**Приклад 1.1.8.** *Скільки тризначних телефонних номерів можна скласти з цифр від 0 до 9 так, щоб у запису номера всі цифри були різні?*

Розв'язання. Тризначний телефонний номер з різних цифр є 3-елементною впорядкованою підмножиною множини $0, 1, \dots, 9$. А кількість $A_{10}^3$ 3-елементних упорядкованих підмножин, які можна скласти з елементів 10-елементної множини, дорівнює $10 \cdot 9 \cdot 8$, тобто

$$A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

**Сполуки (комбінації).** *Сполукою (комбінацією)* з $n$ елементів по $k$ називатимемо $k$-елементну підмножину $n$-елементної множини.

Сполуки з $n$ елементів по $k$ є різними, якщо вони відрізняються своїми елементами (принаймні одним). Порядок елементів у сполуці не є істотним — сполуки, що складаються з одних і тих самих елементів, нерозрізненні.

**Приклад 1.1.9.** *Нехай $\Omega = \{a, b, c\}$. Виписати всі сполуки з 3 елементів по 1 і з 3 по 2.*

Розв'язання. $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ — усі сполуки з 3 елементів по 1, $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ — з 3 по 2.

Зазначимо, що як сполуки $\{a, b\}$ і $\{b, a\}$; $\{b, c\}$ і $\{c, b\}$ та $\{a, c\}$ і $\{c, a\}$ співпадають.

**Число сполук.** *Число $C_n^k$ усіх $k$-елементних підмножин $n$-елементної множини (число сполук з $n$ елементів по $k$) дорівнює $n!/(k!(n-k)!)$, тобто*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

**Приклад 1.1.10 (шахове місто).** *Розглянемо прямокутну сітку квадратів — "шахове місто", яке складається з $m \times n$ квадратних кварталів, відокремлених $n-1$ "горизонтальними" і $m-1$ "вертикальними" вулицями (рис. 1.1.1). Скільки на цій сітці різних найкоротших шляхів, які ведуть з лівого нижнього кута (точки $(0,0)$) до правого верхнього кута (у точку $(m,n)$)?*

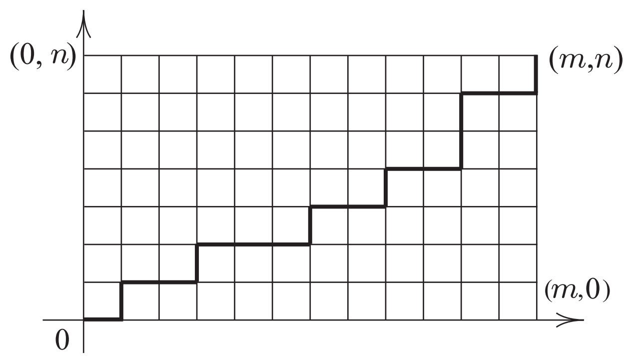


Рис. 1.1.1: "Шахове місто"

Р о з в' я з а н н я. Позначимо буквою Г горизонтальний відрізок шляху, буквою В — вертикальний. Кожен найкоротший шлях з $(0,0)$ у $(m,n)$ має $n$ вертикальних відрізків і $m$ горизонтальних. Він цілком задається впорядкованою послідовністю завдовжки $n+m$, складеною з $m$ букв Г і $n$ букв В і навпаки. Тому число найкоротших шляхів дорівнює числу послідовностей завдовжки $n+m$, складених з $m$ букв Г і $n$ букв В. Кожна така послідовність однозначно задається вибором $m$ місць з $n+m$ для букви Г (місця, що залишаються, заповнюються буквами В), тому їхнє число дорівнює $C_{n+m}^{m}$.

**Розбиття множини.** *Розбиттям* $n$-елементної множини $\Omega$ на $m$ попарно неперетинних непорожніх підмножин, що містять $k_1, k_2, \ldots, k_m$ елементів $(k_1 + k_2 + \ldots$ $\ldots + k_m = n)$, називатимемо впорядкований набір

$$(A, B, C, \ldots, S)$$

неперетинних підмножин $\Omega$, що містять відповідно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ елементів.

Два розбиття на $m$ попарно неперетинних непорожніх підмножин, що містять відповідно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ елементів, різні, якщо хоча б в одній із пар відповідних $k_j$-елементних підмножин $(j = 1, 2, \ldots, m)$ є різні елементи.

**Приклад 1.1.11 .** *Навести всі можливі розбиття множини* $\Omega = \{a, b, c, d\}$ *на три попарно неперетинні підмножини* $A$, $B$, $C$, *що містять відповідно* $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 1$ *елементів.*

Розв'язання.

$(\{a\}, \{b, c\}, \{d\}); (\{a\}, \{c, d\}, \{b\}); (\{a\}, \{b, d\}, \{c\});$
$(\{b\}, \{a, c\}, \{d\}); (\{b\}, \{c, d\}, \{a\}); (\{b\}, \{a, d\}, \{c\});$
$(\{c\}, \{a, b\}, \{d\}); (\{c\}, \{a, d\}, \{b\}); (\{c\}, \{b, d\}, \{a\});$
$(\{d\}, \{a, b\}, \{c\}); (\{d\}, \{a, c\}, \{b\}); (\{d\}, \{b, c\}, \{a\}).$

Зазначимо, що, наприклад, розбиття $(\{a\}, \{b, c\}, \{d\})$ і $(\{d\}, \{b, c\}, \{a\})$ множини $\Omega = \{a, b, c, d\}$ є різними.

**Число розбиттів множини на підмножини.** *Число* $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ *всіх розбиттів* $n$*-елементної множини* $\Omega$ *на* $m$ *попарно неперетинних підмножин, що містять відповідно* $k_1, k_2, \ldots, k_m$ *елементів* $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n)$, *дорівнює* $n!/(k_1!k_2! \ldots k_m!)$, *тобто*

$$C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2! \ldots k_m!}.$$

**Перестановки з повтореннями**. *Перестановкою з повтореннями* (*словом*) завдовжки $n$, утвореною з $k_1$ елементів (букв) $a_1$, $k_2$ елементів (букв) $a_2$, $\ldots$, $k_m$ елементів (букв) $a_m$ $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n)$ називатимемо впорядковану послідовність завдовжки $n$, складену з $k_1$ елементів (букв) $a_1$, $k_2$ елементів (букв) $a_2$, $\ldots$, $k_m$ елементів (букв) $a_m$.

Два слова завдовжки $n$, утворені з $k_1$ букв $a_1$, $k_2$ букв $a_2$, $\ldots$, $k_m$ букв $a_m$ різні, якщо вони відрізняються порядком букв.

**Число перестановок з повтореннями.** *Число перестановок з повтореннями (слів) завдовжки* $n$, *які можна утворити з* $k_1$ *елементів (букв)* $a_1$, $k_2$ *елемен-*

*тів (букв)* $a_2$, ..., $k_m$ *елементів (букв)* $a_m$ $(k_1 + k_2 + \ldots$ $\ldots + k_m = n)$, *дорівнює* $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$.

**Приклад 1.1.12.** *Скільки існує способів розміщення* $n$ *різних частинок по* $m$ *комірках так, щоб до першої комірки потрапило* $k_1$ *частинок, до другої —* $k_2$, ..., *до* $m$*-ї —* $k_m$*?*

Розв'язання. Розіб'ємо $n$-елементну множину розрізненних частинок на $m$ неперетинних підмножин: $k_1$-елементну підмножину частинок, які потрапляють до першої комірки, $k_2$-елементну — до другої, ..., $k_m$-елементну підмножину частинок, які потрапляють до $m$-ї комірки $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n)$. А число способів розбити $n$-елементну множину, як описано вище, дорівнює $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$.

**Сполуки (комбінації) з повтореннями.** *Сполукою (комбінацією) з* $m$ *елементів по* $n$ *з повтореннями* називатимемо набір (множину) з $n$ елементів, кожен з яких належить одному з $m$ типів.

Сполука з $m$ елементів по $n$ з повтореннями однозначно задається числом $x_1$ елементів першого типу, числом $x_2$ елементів другого типу і т. д., числом $x_m$ елементів $m$-го типу, що до неї входять, тобто визначається послідовністю $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ невід'ємних цілих чисел, таких, що $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$, і навпаки — сполука з $m$ елементів по $n$ з повтореннями задає послідовність $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ цілих невід'ємних чисел таку, що $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$ ($x_1$ — число елементів першого типу, $x_2$ — другого і т. д., $x_m$ — число елементів $m$-го типу).

Дві сполуки з повтореннями з $m$ елементів по $n$ різні, якщо вони відрізняються кількістю елементів хоча б одного типу. Порядок елементів у сполуці з повтореннями неістотний.

**Приклад 1.1.13.** *Навести всі сполуки з повтореннями з 4 елементів* $a, b, c, d$ *по 2.*

Розв'язання. $aa, bb, cc, dd, ab, ac, ad, bc, bd, dc$.

**Число сполук з повтореннями.** *Число* $f_m^n$ *сполук з* $m$ *елементів по* $n$ *з повтореннями дорівнює* $C_{n+m-1}^{m-1}$, *тобто*

$$f_m^n = C_{n+m-1}^{m-1}.$$

*Якщо $n > m$, то число таких сполук з $m$ елементів по $n$ з повтореннями, в яких кожен елемент зустрічається хоча б один раз, дорівнює $C_{n-1}^{m-1}$.*

**Приклад 1.1.14 .** *Скільки невід'ємних розв'язків у цілих числах має рівняння $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$?*

Р о з в' я з а н н я. Розв'язком рівняння

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$$

у цілих невід'ємних числах є послідовність $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ цілих невід'ємних чисел, у якої $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$. Кожна така послідовність задає сполуку з $m$ елементів по $n$ з повтореннями (і навпаки). Тому шукане число розв'язків дорівнює числу $f_m^n$ сполук з $m$ елементів по $n$ з повтореннями.

**Сполуки з повтореннями і слова.** Нехай ми маємо слово завдожки $n$, складене з $m$ букв (елементів): $x_1$ букв $a_1$, $x_2$ букв $a_2$, і т. д., $x_m$ букв $a_m$ ($x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$). "Зсипемо" букви слова в урну, отримаємо набір із $n$ елементів, у якому число елементів першого типу дорівнює $x_1$, другого — $x_2$, і т. д., $m$-го типу — $x_m$, тобто отримаємо сполуку з $m$ елементів по $n$ з повтореннями (одну) із заданим числом елементів кожного типу, що визначається словом.

Навпаки. Нехай ми маємо сполуку з $m$ елементів по $n$ з повтореннями, у якій число елементів першого типу дорівнює $x_1$, другого — $x_2$ і т. д., $m$-го типу — $x_m$ (маємо набір із $n$ елементів, "зсипаних" в урну: $x_1$ елементів $a_1$, $x_2$ елементів $a_2$ і т. д., $x_m$ елементів $a_m$). Розмістивши елементи на $n$ занумерованих місцях (упорядкувавши їх), отримаємо слово. Число всіх таких слів дорівнює $C_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

## 1.2 Задачі

АЗ: $1.3^\circ, 1.10, 1.14, 1.16^\circ, 1.18, 1.19^\circ, 1.22, 1.23, 1.25.$

СЗ: $1.4^\circ, 1.5^\circ, 1.11^\circ, 1.15, 1.17^\circ, 1.20, 1.24, 1.27, 1.30, 1.32.$

У задачах, що пропонуються, перш ніж підраховувати число елементів тієї чи іншої множини, треба чітко з'ясувати: *що саме являють собою ці елементи* (*тобто, що* *підраховувати*). Перш ніж відповідати на питання “*скільки?*”, треба відповісти на питання “*що?*” (що рахуватимемо).

**1.1°.** З міста $A$ до міста $B$ веде $n$ доріг, а з $B$ до $C$ — $m$ доріг. Скількома способами можна здійснити подорож за маршрутом $A - B - C$?

**1.2°.** На вершину гори веде сім стежок. Скількома способами турист може піднятися на гору й спуститися з неї? Відповісти на це питання за умови, що сходження та спуск відбуваються різними шляхами.

**1.3°.** У розіграшу першості країни з футболу беруть участь 17 команд. Скількома способами можуть бути розподілені між ними золота, срібна та бронзова медалі?

**1.4°.** Скільки тризначних чисел можна записати цифрами 0, 1, 2, 3, 4?

**1.5°.** Скільки тризначних чисел можна записати цифрами 0, 1, 2, 3, 4, якщо кожну з них використовувати не більше одного разу?

**1.6°.** Скількома способами сім осіб можуть стати в чергу до каси?

**1.7°.** Учні вивчають 10 предметів. У понеділок за розкладом 6 уроків, причому всі вони різні. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?

**1.8°.** Скільки є п’ятизначних чисел, що діляться на 5?

**1.9°.** Автомобільний номер складається з двох літер і чотирьох цифр. Яке число різних номерів можна скласти, використовуючи 26 літер латинського алфавіту?

**1.10.** У розіграшу першості країни з футболу беруть участь 16 команд. Команди, які здобудуть перше, друге й третє місця, нагороджують відповідно золотою, срібною і бронзовою медалями, а команди, які опиняться на двох останніх місцях, залишать вищу лігу. Скільки різних результатів першості може бути?

**1.11°.** Скількома способами можна з 9 осіб вибрати комісію у складі 4 осіб?

**1.12°.** Скількома способами читач може вибрати три книги з п’яти?

**1.13°.** Скількома способами можна розмістити на полиці 4 різні книги?

**1.14.** Нехай $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — різні прості числа. Скільки дільників має число

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n},$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — деякі натуральні числа?

**1.15.** Скільки є перестановок з $n$ елементів, у яких два вказані стоять поряд?

**1.16°.** Скількома способами можна розсадити 4 учнів на 25 місцях?

**1.17°.** Студенту необхідно протягом 8 днів скласти 4 екзамени (за один день студент складає не більше одного екзамену). Скількома способами це можна зробити?

**1.18.** Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ так, щоб числа $1, 2, 3$ стояли поряд і в порядку зростання?

**1.19.** Скільки є чотиризначних чисел, у яких кожна наступна цифра більша за попередню?

**1.20.** Скільки є чотиризначних чисел, у яких кожна наступна цифра менша за попередню?

**1.21*.** У прямокутну таблицю з $m$ рядків і $n$ стовпців треба записати числа $+1$ і $-1$ так, щоб добуток чисел у кожному рядку й кожному стовпці дорівнював 1. Скількома способами це можна зробити?

**1.22.** Маємо $p$ білих і $q$ чорних куль ($p > q$). Скількома способами можна розмістити у ряд усі кулі так, щоб жодні 2 чорні кулі не лежали поряд?

**1.23.** На площині проведено $n$ прямих так, що ніякі дві з них не паралельні й ніякі три не перетинаються в одній точці.

1) Знайдіть кількість точок перетину прямих.

2) Скільки трикутників утворюють прямі?

3) На скільки частин поділять площину прямі?

4) Скільки серед частин, на які поділяється площина прямими, обмежених і скільки необмежених?

**1.24.** Скільки діагоналей має опуклий $n$-кутник?

**1.25.** У скількох точках перетинаються діагоналі опуклого $n$-кутника, якщо жодні три з них не перетинаються в одній точці?

**1.26*.** В опуклому $n$-кутнику проведено всі діагоналі. Відомо, що жодні три з них не перетинаються в одній точці. На скільки частин буде поділено при цьому $n$-кутник?

**1.27.** Довести, що

$$n(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) = n(A_1)n(A_2)\dots n(A_k).$$

**1.28.** Довести, що число способів упорядкувати $n$-елементну множину дорівнює $n!$

**1.29.** Довести, що число $A_n^k$ розміщень з $n$ елементів по $k$ дорівнює $n(n-1)\dots(n-(k-1))$.

**1.30.** Довести, що $C_n^k$ — число $k$-елементних підмножин $n$-елементної множини — дорівнює $n!/(k!(n-k)!)$.

**1.31.** Довести, що

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

**1.32.** Довести, що число $C_n(k_1, k_2, \dots, k_m)$ способів розбити $n$-елементну множину на $m$ неперетинних підмножин відповідно з $k_1, k_2, \dots, k_m$ елементами дорівнює $n!/(k_1!k_2!\dots k_m!)$.

**1.33.** Довести, що існує $C_n(k_1, k_2, \dots, k_m)$ слів завдовжки $n$ з $k_1$ букв $a_1$, $k_2$ букв $a_2$, …, $k_m$ букв $a_m$.

**1.34.** Скількома способами можна поділити $m+n+s$ предметів на три групи так, щоб в одній групі було $m$ предметів, у другій — $n$, у третій — $s$?

**1.35.** Скількома способами можна поділити $3n$ предметів між трьома особами так, щоб кожна особа отримала $n$ предметів?

**1.36.** Довести, що число $f_m^n$ сполук з $m$ елементів по $n$ з повтореннями дорівнює $C_{n+m-1}^{m-1}$.

**1.37.** Довести, що число сполук з $m$ елементів по $n$ з повтореннями $(n > m)$, в яких кожен елемент зустрічається хоча б один раз, дорівнює $C_{n-1}^{m-1}$.

# Розв'язання, вказівки, відповіді до глави 1

**1.1°.** $mn$. **1.2°.** 49; 42. **1.3°.** $17 \cdot 16 \cdot 15$.
**1.4°.** $4 \cdot 5 \cdot 5$. **1.5°.** $4 \cdot 4 \cdot 3$. **1.6°.** $7!$
**1.7°.** $A_{10}^6$. **1.8°.** $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2$. **1.9°.** $26^2 \cdot 10^4$.
**1.10.** $16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot C_{13}^2$. **1.11°.** $C_9^4$. **1.12°.** $C_5^3$.
**1.13°.** $4!$

**1.14.** Дільники числа $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ мають вигляд $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_n^{\beta_n}$ і визначаються послідовністю цілих невід'ємних чисел $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ таких, що $0 \le \beta_i \le \alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Кількість таких послідовностей (а разом з ними і дільників) згідно з правилом множення дорівнює

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_n + 1).$$

**1.15.** $2 \cdot (n-1)!$ **1.16°.** $A_{25}^4$. **1.17°.** $A_8^4$.
**1.18.** $(n-2)!$

**1.19.** $C_9^4$, вказані числа визначаються множиною своїх цифр.

**1.20.** $C_{10}^4$.

**1.21*.** Заповнюємо всі клітини таблиці, крім клітин останнього рядка й останнього стовпця (правого), числами $+1$ і $-1$ (згідно з правилом множення, це можна зробити $2^{(n-1)(m-1)}$ способами). Заповнюємо $n-1$ клітин останнього рядка, крім останньої (правої) так, щоб добуток чисел у кожному з $(n-1)$ стовпців дорівнював $+1$. Заповнюємо клітини останнього стовпця так, щоб добуток чисел у кожному з $m-1$ перших рядків і в останньому стовпці дорівнював $+1$. Отже, добуток чисел у кожнім стовпці дорівнюватиме +1 і у кожнім з $m-1$ перших рядків дорівнюватиме +1, але тоді добуток чисел і в останньому рядку дорівнюватиме +1, оскільки у таблиці добуток чисел за рядками дорівнює добуткові за стовпцями.

Відповідь: $2^{(n-1)(m-1)}$.

**1.22.** Із $p+1$ проміжків між білими кулями (враховуючи два кінцеві нескінченні проміжки) виберемо $q$, в яких розмістимо чорні кулі. Це можна виконати $C_{p+1}^q$ способами.

**1.23 (3).** Послідовно проводитимемо на площині прямі. Нехай проведено $n-1$ прямих і $A_{n-1}$ — число частин площини, які при цьому утворилися. Проведемо $n$-у пряму. До $A_{n-1}$ частин $n$-а пряма додасть ще $n$ частин, тому

$$A_n = A_{n-1} + n.$$

Докладніше: $A_1 = 2$, $A_2 = A_1 + 2, \ldots, A_n = A_{n-1} + n, \ldots$ Додаючи почленно перші $n$ рівностей, одержимо

$$A_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Відповіді: 1) $C_n^2$; 2) $C_n^3$; 3) $n(n+1)/2+1$; 4) $2n$ — кількість необмежених частин, $n(n-3)/2+1$ — кількість обмежених.

**1.24.** $n(n-3)/2$.

**1.25.** Кожна точка перетину діагоналей задає чотири вершини $n$-кутника і навпаки, тому число точок перетину діагоналей дорівнює $C_n^4$.

**1.26*.** У опуклому $n$-кутнику всього $n(n-3)/2 = N$ діагоналей.

Нехай $k-1$ перших діагоналей ділять многокутник на $A_{k-1}$ частин. Проведемо $k$-ту діагональ. Позначимо через $p_k$ число точок перетину $k$-ї діагоналі з першими $k-1$ діагоналями. Тоді

$$A_k = A_{k-1} + (p_k + 1), \ k = 2, 3, \ldots, N.$$

Додаючи почленно ці рівності, отримаємо

$$A_N = 1 + C_n^4 + n(n-3)/2.$$

**1.27.** Скористатися методом математичної індукції.

**1.28.** Записати елементи у список і приписати кожному з них номер місця у списку.

**1.29.** Скористатися правилом множення.

**1.30.** З одного боку, $n$-елементну множину можна впорядкувати $n!$ способами. З іншого, $C_n^k k!(n-k)!$ способами — спочатку розбити її на дві неперетинні підмножини ($C_n^k$ способами), а потім упорядкувати кожну з них (відповідно $k!$ і $(n-k)!$ способами). Тому $n! = C_n^k k!(n-k)!$

**1.32.** Підрахуємо число перестановок $n$-елементної множини двома способами. З одного боку, це число дорівнює $n!$ А з іншого, його можна знайти так: розбиваємо $n$-елементну множину на $m$ неперетинних підмножин, які містять відповідно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ елементів (це можна виконати $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ способами), а потім упорядковуємо кожну з них відповідно $k_1!, k_2!, \ldots, k_m!$ числом способів. Отже

$$n! = C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) k_1! k_2! \ldots k_m!$$

**1.33.** Слово визначається вибором місць під букву кожного типу (розбиттям множини на підмножини).

**1.34.** $C_{m+n+s}(m, n, s)$. **1.35.** $C_{3n}(n, n, n)$.

**1.36.** Кожній сполуці з повтореннями з $m$ елементів по $n$ можна поставити у відповідність послідовність з $n$ нулів, відокремлених $m-1$ одиницями (причому число нулів між одиницями дорівнює числу елементів даного типу) і навпаки.

**1.37.** Див. попередню задачу, $m-1$ одиниць мають стояти у $n-1$ проміжках між нулями