Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Завдання другого туру
Всеукраїнської олімпіади з математики
для професійної орієнтації вступників на базі повної загальної середньої освіти (2021 р.)

1. Морська вода містить 5% солі. Скільки кілограмів прісної води треба додати до 27 кг морської, щоб масова частка солі в останній становила 2%?

Відповідь: 40,5 кг.

Розв'язання. У 27 кг морської води $27 \cdot 0,05 = 1,35$ кг солі. Якщо x — вага 2% розчину, то $1,35/x = 0,02$. Звідси $x = 67,5$. Прісної води треба додати $67,5 - 27 = 40,5$.

2. Основою прямого паралелепіпеда є ромб. Площі його діагональних перерізів дорівнюють 6 см^2 і 8 см^2. Обчислити площу бокової поверхні паралелепіпеда.

Відповідь: 20 см^2.

Розв'язання. Нехай h — висота паралелепіпеда. Довжина однієї діагоналі ромба $8/h$, іншої — $6/h$. Сторона ромба $a = \sqrt{(4/h)^2 + (3/h)^2} = 5/h$. Площа бокової поверхні паралелепіпеда $4ah = 4(5/h)h = 20$.

3. Знайти найбільший розв'язок нерівності (у градусах) із вказаного проміжку:

$$\sin(3x - 30^\circ) \leq \sin 150^\circ;\ 0^\circ \leq x \leq 90^\circ.$$

Відповідь: 90°.

Розв'язання. Досить знайти найбільший розв'язок нерівності

$$\sin(3x - 30^\circ) \leq 1/2$$

з проміжку $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$.

4. Розв'язати нерівність

$$(\sin 2)^{\dfrac{x^2+5x}{x-1}} > (\sin 2)^{-\dfrac{x+8}{x-1}}.$$

Відповідь: $(-\infty; -4) \cup (-2; 1)$.

Розв'язання. Оскільки $0 < \sin 2 < 1$, то нерівність

$$(\sin 2)^{\dfrac{x^2+5x}{x-1}} > (\sin 2)^{-\dfrac{x+8}{x-1}}.$$

рівносильна нерівності

$$\frac{x^2+5x}{x-1} < -\frac{x+8}{x-1}.$$

5. Розв'язати нерівність

$$\sqrt{x^2 - 3x} \geq \sqrt{x^2 - 4x}.$$

Розв'язання. Нерівність рівносильна системі нерівностей

$$x^2 - 3x \geq 0,\ x^2 - 4x \geq 0,\ x^2 - 3x \geq x^2 - 4x.$$

Розв'язком останньої системи є $\{0\} \cup [4, +\infty)$.

6. Діагональ куба дорівнює $\sqrt{27}$. Знайти його об'єм.

Відповідь: 27.

Розв'язання. Якщо a — ребро куба, то діагональ грані куба дорівнює $a\sqrt{2}$. Діагональ куба дорівнює діагоналі прямокутника зі сторонами a і $a\sqrt{2}$. Тому $\sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{27}$. Звідси $a = 3$, а об'єм куба $a^3 = 27$.

7. Знайти розв'язок (x, y) системи рівнянь.

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Відповідь: $(1,6; 8)$.

Розв'язання. Спочатку розв'язати систему відносно $\frac{1}{x}$ та $\frac{1}{y}$.

8. Знайти область визначення функції

$$f(x) = \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

Відповідь: Множина $(-\infty, +\infty)$.

Розв'язання. Функція $f(x)$ визначена у всіх точках прямої за винятком тих, у яких знаменник дорівнює нулеві. Вираз $\sin^4 x + \cos^4 x$ дорівнює нулеві при x, для яких $\sin^4 x = 0$ і $\cos^4 x = 0$. Таких x не існує. Тому областю визначення функції $f(x)$ є $(-\infty, +\infty)$.

9. У $\triangle ABC$ бісектриси AA' і BB' утворюють кут $110°$. Знайти кут C.

Відповідь: $40°$.

Розв'язання. Нехай $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, бісектриси перетинаються у точці D. У $\triangle ABD$ кут $\angle ADB = 110° = 180° - (\alpha + \beta)$. Звідси $\alpha + \beta = 70°$.

У $\triangle ABC$ кут $\angle C = 180° - (2\alpha + 2\beta) = 180° - 2(\alpha + \beta) = 180° - 140° = 40°$

10. Розв'язати нерівність

$$\frac{\log_5(5-x)}{\log_{\frac{1}{5}} 6} > 0.$$

Відповідь: $(4; 5)$.

Голова предметної комісії з математики Турчин В.М.